Г. Ю. Удалова

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,

yeyeg@yandex.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu) = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx} + (\mathrm{sgny})u_{yy} - b^2 u\right) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $b > 0$ – заданные постоянные, и следующую задачу.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}),\ u_y(x,y) \in C^1(D);\ u_{xxy}, u_{yyy} \in C(D_- \cup D_+);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu) = 0, \quad (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{2}$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{3}$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{4}$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$.

Уравнение (1) в области D равносильно уравнению смешанного эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестной правой частью

$$Lu = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), \ y > 0, \\ f_2(x), \ y < 0. \end{cases}$$

При этом задача 1 сводится к следующей обратной задаче.

Задача 2. Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям (2), (3) – (5) и, кроме того,

$$Lu = f(x,y), \ (x,y) \in D_- \cup D_+, \ f_i(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1], \ i = 1,2.$$

Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка изучались многими авторами (см. работы [1 – 3] и приведенную там библиографию). В данной заметке, как и в работах [4, 5], предлагается метод решения задачи для дифференциального уравнения третьего порядка путем сведения к обратной задаче для уравнения смешанного типа второго порядка с неизвестными правыми частями. Аналогично рассуждениям из [4 – 6] методом спектрального анализа доказана единственность решения задач 1 и 2, построенных в виде ортогональных рядов. Доказана устойчивость решения по граничным функциям. Оказалось, что разрешимость задач 1 и 2 существенным образом зависит от числа α. А именно, справедливы утверждения.

Теорема 1. *Если существует решение задач* 1 *и* 2*, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta(k) = \sin \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta + \cos \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta - 2 \cos \lambda_k \alpha + 1 \neq 0 \quad (6)$$

при любом $k \in N_0$. *Здесь* $\lambda_k = \sqrt{(\pi k)^2 + b^2}$.

Лемма. *Если α является любым иррациональным алгебраическим числом степени $n = 2$, то существуют положительные постоянные C_0, β_0 и b_0, вообще говоря, зависящие от α, β и b, такие, что при $b < b_0$, $\beta > \beta_0$ и любых $k \in N$ выполнено условие*

$$|\Delta(k)| \geqslant C_0 \frac{e^{\lambda_k \beta}}{k^2}.$$

Учитывая последнюю лемму, можно сформулировать теорему о существовании и устойчивости задач 1 и 2:

Теорема 2. *Если α является любым иррациональным алгебраическим числом степени $n = 2$, $\psi(x), \varphi(x), \in C^4[0,1]$, $g(x) \in C^3[0,1]$, $\psi''(0) = \psi''(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = \psi'''(0) = = \psi'''(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1) = g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = = g''(0) = g''(1) = 0$, то при $\beta > \beta_0$ и $b < b_0$ существует единственное и устойчивое решение задачи 2. Если при этом $\psi(x), \varphi(x), \in C^5[0,1]$, $g(x) \in C^4[0,1]$, $\psi^{IV}(0) = \psi^{IV}(1) = = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{IV}(1) = g'''(0) = g'''(1) = 0$, то существует единственное и устойчивое решение задачи 1.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. *К теории уравнений смешанно-составного типа* // Сиб. мат. журн. – 1961. – Т. 11. – № 1. – С. 7–19.

2. Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* – Ташкент: Изд-во “ФАН”, 1979. – 238 с.

3. Кожанов А. И. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка.* – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1990. – 150 с.

4. Сабитов К. Б. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка* // ДАН. – 2009. – Т. 427. – № 5. – С. 593–596.

5. Сабитов К. Б. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 5. – С. 705–713.

6. Удалова Г. Ю. *Обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе* // Докл. АМАН. – 2012. – Т. 14. – № 1. – С. 98–111.

Э. И. Фазлеева, Г. И. Хазиева

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

elmira.fazleeva@mail.ru, www.guzel007@mail.ru

ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Числовая окружность – это вторая геометрическая модель для множества действительных чисел. Первую модель – числовую прямую – учащиеся уже знают. Есть аналогия: для числовой прямой правило соответствия (от числа к точке) почти дословно такое же. Но есть и принципиальное отличие – источник основных трудностей в работе с числовой окружностью: на прямой каждая точка соответствует *единственному* числу, на окружности это не так. Если точка M окружности соответствует числу t, то она соответствует и всем числам вида $t + 2\pi k$, где 2π – длина единичной окружности, а k – целое число, показывающее количество полных обходов окружности в ту или иную сторону [1].